

УДК 332.132: 519.865.7

А.В. Мартыненко^{1,2}

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ И МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИЕЙ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ (НА ПРИМЕРЕ АВТОДОРОГ СВЕРДЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ)

При изучении транспортных сетей часто используются различные числовые характеристики их топологических и метрических свойств. Одним из наиболее популярных показателей, используемым для описания иерархической структуры элементов сети (дуг и вершин), является показатель промежуточной центральности. Для каждого элемента сети он равен количеству кратчайших путей, проходящих через него. Тем самым он показывает важность элемента для сети в целом.

Показатель промежуточной центральности использовался различными авторами, причем не только как инструмент исследования и анализа конкретных сетей, но и как самостоятельный объект изучения. В частности, многих исследователей интересовал вопрос о том, насколько данный показатель отражает особенности реального функционирования транспортной сети, например загруженность ее элементов. Применение корреляционно-регрессионного анализа для данных по загруженности и промежуточной центральности элементов некоторых конкретных сетей показали, что между этими величинами есть прямая корреляционная связь, однако недостаточно сильная для того, чтобы ее можно было использовать для прогнозирования загруженности элементов сети на основе их промежуточной центральности.

В настоящей работе более глубоко исследован вопрос о взаимосвязи между промежуточной центральностью и загруженностью как часть более общего вопроса о связи морфологических и функциональных свойств транспортной сети. Для сети автомобильных дорог Свердловской области по гравитационной модели транспортных корреспонденций смоделирована загруженность дуг. При разных параметрах гравитационной модели получены различные режимы загруженности, и для каждого из них проанализирована связь с показателем промежуточной центральности.

В результате моделирования и анализа установлено, что на тесноту связи между промежуточной центральностью и загруженностью существенно влияет транспортное поведение пользователей сети, а именно, расстояние, на которое они совершают поездки. Если средняя длина поездки значительно превосходит среднюю длину дуги сети, то между промежуточной центральностью и загруженностью наблюдается сильная корреляция. В противном случае значимой зависимости между промежуточной центральностью и загруженностью нет.

Ключевые слова: промежуточная центральность; центральность по промежуточности; центральность по посредничеству; гравитационная модель; матрица транспортных корреспонденций; морфология сети; загруженность элементов сети

Введение. Морфологические свойства инфраструктурных сетей (транспортных, электроснабжения и т. п.) изучались многими авторами, интерес которых вызывала как непосредственно морфология сети и внутренние закономерности ее развития [Тархов, 2006, 2016, 2019; Панов, 2020; Barthelemy, 2011], так и влияние морфологии на взаимосвязь сети и обслуживаемой ею территории [Бакланов и др., 2018; Бугроменко, 1967; Haggett, Chorley, 1969; Kansky, 1969]. В подобных исследованиях инфраструктурную сеть обычно рассматривают как граф, т. е. как совокупность вершин и соединяющих их дуг, а для ее описания используют различные числовые характеристики, например, такие, которые позволяют выявить иерархическую структуру элементов сети. Одним из наиболее важных и часто используемых показателей такого сорта является *промежуточная центральность* (англ. *betweenness centrality*), которая для вершины сети определяется следующим образом [Barthelemy, 2011]:

$$BC(v) = \frac{1}{n^2 - n} \sum \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}, \quad (1)$$

где $BC(v)$ – показатель промежуточной центральности вершины v ; n – количество вершин в сети; σ_{st} – количество кратчайших путей из вершины s в вершину t ; $\sigma_{st}(v)$ – количество кратчайших путей из вершины s в вершину t , которые проходят через вершину v . В формуле (1) суммирование ведется по всем парам различных вершин s и t . Под кратчайшим путем понимается путь, который содержит наименьшее количество дуг (кратчайший в смысле топологического расстояния).

Определение промежуточной центральности дуги выглядит аналогично

$$BC(a) = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{s \neq t} \frac{\sigma_{st}(a)}{\sigma_{st}}, \quad (2)$$

¹ Уральский государственный университет путей сообщения, кафедра естественнонаучных дисциплин, доцент, канд. физ.-мат. н.

² Институт экономики УрО РАН, центр развития и размещения производительных сил, ст. науч. с.; e-mail: amartynenko@rambler.ru

но в этом случае $\sigma_{st}(a)$ – количество кратчайших в топологическом смысле путей из вершины s в вершину t , которые проходят через дугу a .

Если дугам приписаны какие-либо веса (чаще всего расстояние или время) и под кратчайшим путем понимается путь, который состоит из дуг с наименьшей суммой весов, то наряду с величинами $BC(v)$ и $BC(a)$ рассматриваются весовые показатели промежуточной центральности

$$BCW(v) = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(v)}{\mu_{st}}, \quad (3)$$

$$BCW(a) = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(a)}{\mu_{st}}, \quad (4)$$

где $\mu_{st}(v)$, $\mu_{st}(a)$ и μ_{st} – соответствующие количества кратчайших путей с учетом веса дуг, причем в большинстве случаев для реальных сетей $\mu_{st} = \mu_{st}(v) = \mu_{st}(a) = 1$.

Отметим, что в русскоязычной литературе нет устоявшегося термина для обозначения характеристик (1)–(4). Наряду с термином «промежуточная центральность» используются термины «центральность по промежуточности» [Карпачевский, Шиликина, 2019] и «центральность по посредничеству» [Щербакова, 2015; Носырева, 2018]. В настоящей работе мы будем использовать только термин «промежуточная центральность» и там, где это удобно, слово «промежуточная» будем опускать.

Исследования, посвященные непосредственно показателю промежуточной центральности и его применению для анализа инфраструктурных сетей, насчитывают не один десяток работ. Основные результаты в этом направлении, полученные до 2011 г., хорошо освещены в обзорной статье [Barthelemy, 2011]. Среди более поздних работ можно отметить [Носырева, 2018] и [Карпачевский и др., 2019], в которых промежуточная центральность использовалась для анализа сетей электроснабжения Восточной Сибири и Калининградской области, соответственно, а также работу [Сяолин и др., 2016], в которой исследовались взаимосвязи между показателем промежуточной центральности вершин сети и размещением населения Санкт-Петербурга. Применению показателя промежуточной центральности для изучения городской транспортной сети посвящена также статья [Weiyan et al., 2019]. А в [Зинькина и др., 2014] показатели центральности применялись для анализа глобальной миграционной сети. Детальное обсуждение математических свойств промежуточной центральности, а также ее место среди других сетевых мер центральности можно найти в работе [Щербакова, 2015].

Показатель промежуточной центральности BC отражает самые общие (топологические) свойства сети. Более информативный показатель BCW учитывает не только топологию, но также и метрические свойства элементов сети. Однако в любом случае речь идет о количественной характеристике только лишь морфологических свойств сети. Есте-

ственно возникает вопрос о том, насколько показатели промежуточной центральности отражают функциональные свойства сети и могут ли они быть использованы для анализа и прогнозирования ее функционирования. В частности, на интуитивном уровне ожидается, что показатель центральности любого элемента сети должен быть тесно связан с его загруженностью, т. е. с количеством транспортных средств, перемещающихся по элементу за некоторый промежуток времени. Если бы это было так, то показатель центральности можно было бы использовать для прогнозирования загруженности и, тем самым, для, например, обоснования иерархии дорог при проектировании транспортных сетей.

Однако имеющиеся исследования конкретных транспортных сетей показывают отсутствие существенной зависимости между загруженностью элементов и их промежуточной центральностью. Так, в работе [Kurant et al., 2006] изучалась сеть железных дорог Европейского союза, и было показано, что для этой сети коэффициент корреляции Пирсона между показателем BC для вершин сети и их реальной загруженностью равен 0,26. Аналогичный результат был получен для сети автомобильных дорог Израиля в статье [Puzis et al., 2013]. Здесь коэффициент корреляции между BC и загруженностью вершин составил 0,11. В работах [Kazerani, Winter, 2009a, 2009b] слабость связи между загруженностью элементов сети и показателями центральности была продемонстрирована на примере специально сконструированной транспортной сети. Авторы двух последних работ также обосновали, что из двух показателей BC и BCW , значения второго лучше соответствуют реальной нагрузке элементов сети.

Тот факт, что наблюдается более высокий уровень корреляции между BCW и загруженностью элементов сети, подтверждается и расчетами для конкретных сетей. Например, для сети автомобильных дорог Израиля коэффициент корреляции между BCW и реальной загруженностью элементов сети равен 0,36 [Puzis et al., 2013]. Это конечно больше, чем для BC , но все равно недостаточно, чтобы делать какие-либо выводы о функционировании сети, пользуясь значениями BCW .

Исследование зависимости между BCW и функциональными классами дорог реальной сети также не дало каких-то значимых результатов [Мартыненко, 2015]. Было показано, что определенная связь есть, но не настолько сильная, чтобы можно было объяснить существующую иерархию элементов сети на основе их центральности.

Причины того, что показатели центральности слабо коррелируют с загруженностью элементов сети, частично обсуждаются в работах [Kazerani et al., 2009a; Puzis et al., 2013]. Там было показано, что для BC связь с реальной загруженностью будет тем слабее, чем сильнее вариация дуг сети по длине, поскольку в этом случае кратчайший по количеству дуг путь может не быть кратчайшим по длине. Например, для внутригородских транспортных се-

тей BC отражает загруженность гораздо лучше, чем для междугородних, именно потому, что дуги улично-дорожной сети различаются по длине не так сильно, как дуги, соединяющие города. Также связь BC и BCW с реальной загруженностью элементов сети будет слабой, если по сети осуществляется интенсивное движение, а пропускная способность ее элементов не велика. В этом случае кратчайший путь может быть настолько загруженным, что пользователи сети будут выбирать другие пути и тем самым повышать загруженность дуг и вершин, образующих эти пути.

Таким образом, причиной слабой корреляции между показателем BCW и загруженностью элементов сети является то, что транспортные средства могут передвигаться не по кратчайшим путям (в силу ограничений по пропускным способностям). Является ли эта причина единственной (основной) или же есть и другие факторы, приводящие к ослаблению указанной корреляции? Ответ на этот вопрос представляет значительный прикладной и теоретический интерес. В частности, если других значимых факторов нет, то само значение корреляции между BCW и загруженностью может быть использовано на практике как характеристика эффективности сети: если корреляция сильная, то это означает, что большинство перемещений осуществляется по кратчайшим путям, т. е. сеть функционирует эффективно. Если же значение корреляции мало, то это означает, что в силу каких-то недостатков транспортной сети многие перемещения осуществляются не по кратчайшим путям, и для повышения эффективности сети необходимо увеличение пропускных способностей ее элементов.

С теоретической точки зрения сформулированный вопрос является частью более общего вопроса о том, как связаны между собой морфологические и функциональные свойства транспортной сети. Если на корреляцию между загруженностью и BCW влияет только использование (неиспользование) кратчайших путей, связанное с пропускной способностью элементов сети, то это означает, что загруженность (функциональное свойство) обуславливается только лишь морфологией сети и пропускной способностью ее элементов. Из этого, в частности, следует, что существует возможность модифицировать показатель BCW путем «добавления в него» информации о пропускной способности элементов сети так, чтобы новый показатель сильно коррелировал с загруженностью и тем самым позволял прогнозировать функционирование транспортной сети.

К сожалению, описанные перспективы по практическому использованию и модификации показателя BCW невозможно реализовать, поскольку слабая корреляция между загруженностью и BCW вызвана не только неиспользованием кратчайших путей, но и другими факторами. В частности, нами был обнаружен достаточно неожиданный фактор, не имеющий какого-либо отношения к морфологии сети и пропускным способностям ее элементов, но при этом оказывающий очень сильное влияние на кор-

реляцию между загруженностью и BCW . Этим фактором является *средняя длина (продолжительность) поездки* (СДП) в сети, которая является одной из количественных характеристик транспортного поведения пользователей сети и обусловлена только лишь соотношением их транспортных потребностей и возможностей. Как оказалось, СДП оказывает гораздо более сильное влияние на корреляцию между загруженностью и BCW , чем использование (неиспользование) кратчайших путей, и при малых значениях СДП коэффициент корреляции может принимать значения, близкие к нулю.

Поскольку связь между СДП, загруженностью и показателем BCW имеет значение не только в контексте сформулированного выше вопроса, но также представляет и самостоятельный научный интерес, то в настоящей работе мы хотим детально исследовать влияние СДП на корреляцию между загруженностью дуг и их весовой промежуточной центральностью $BCW(a)$ на примере конкретной сети междугородних автомобильных дорог.

Материалы и методы исследования. Общая идея исследования заключается в следующем. Для конкретной транспортной сети на основе гравитационной модели можно рассчитать матрицу транспортных корреспонденций между всеми парами вершин. Предполагая, что все передвижения в сети осуществляются по кратчайшим путям, по матрице корреспонденций можно получить загруженность всех дуг сети. Естественно, результаты всех этих расчетов зависят от параметров гравитационной модели. В частности, гравитационная модель содержит параметр, отвечающий за СДП. Поэтому, проводя расчеты матрицы корреспонденций и загруженности всех дуг сети для различных значений этого параметра, мы тем самым получим загруженности всех дуг сети для различных значений СДП. Значения показателя $BCW(a)$ можно рассчитать для всех дуг сети в соответствии с определением (4). Полученные результаты позволяют сравнить значения $BCW(a)$ и загруженности дуг сети при разных СДП. В частности, для любого значения СДП можно вычислить коэффициент корреляции между загруженностью дуг и $BCW(a)$.

Далее рассмотрим более подробно основные аспекты реализации описанного подхода. Как уже было сказано, мы будем использовать сеть междугородних автомобильных дорог, а объемы корреспонденций между вершинами этой сети (населенными пунктами) будем рассчитывать на основе гравитационной модели

$$Q_{st} = \gamma \frac{P_s P_t}{f(d_{st})}, \quad (5)$$

где Q_{st} – объем транспортной корреспонденции между вершинами s и t ; P_s и P_t – потенциалы вершин s и t ; d_{st} – обобщенная цена взаимодействия по сети между вершинами s и t ; $f(d_{st})$ – функция тяготения, которая задает влияние обобщенной цены на объем корреспонденции; γ – положительный параметр модели.

Гравитационная модель (5) и ее различные модификации используются для расчета объемов взаимодействия географически удаленных объектов. В частности, многочисленные научные исследования посвящены ее применению для оценки распределения товарных потоков в международной торговле [Шумилов, 2017], объемов морских грузоперевозок [Kaluza, 2010], количества сообщений в сетях связи [Krings et al., 2009] и во многих других областях (подробный обзор применения гравитационной модели можно найти в [Barthelemy, 2011]). Достаточно серьезное практическое применение гравитационная модель находит при решении задач по расчету пассажирских корреспонденций, особенно для внутригородской транспортной сети [Ortuzar, Willumsen, 2011]. Кроме того, гравитационная модель используется в теоретико-географических исследованиях. Например, в работе [Бабурин и др., 2016] на ее основе формализовано понятие «экономико-географическое положение города».

В зависимости от характера рассматриваемого взаимодействия, в качестве потенциала P_s используются разные величины, например: валовый продукт, объем промышленного производства, численность населения, совокупный доход и т. п. В качестве обобщенной цены d_{st} может выступать непосредственно тариф на перевозку грузов или пассажиров, время, расстояние или какая-то комбинация этих величин. Что касается функции $f(d_{st})$, то она должна быть неотрицательной и монотонно возрастающей. Чаще всего используют степенную функцию $f(d_{st}) = d_{st}^\beta$ или показательную $f(d_{st}) = e^{\beta d_{st}}$. В обоих случаях параметр β тесно связан с СДП. В частности, для степенной функции СДП вычисляется по формуле

$$\text{СДП} = \text{СДП}(\beta) = \frac{\sum_{s \neq t} Q_{st} d_{st}}{\sum_{s \neq t} Q_{st}} = \frac{\sum_{s \neq t} P_s P_t d_{st}^{1-\beta}}{\sum_{s \neq t} P_s P_t d_{st}^{-\beta}}. \quad (6)$$

Зависимость (6) была подробно исследована в классической работе [Evans, 1971]. Кроме прочего, было установлено, что функция $\text{СДП}(\beta)$ строго убывает при $\beta \in [0, +\infty]$. Отсюда следует, что между значениями β и СДП существует взаимно-однозначное соответствие, и поэтому β можно рассматривать как параметризацию величины СДП: изменение β приводит к однозначному изменению СДП.

Далее под потенциалом P_s мы будем понимать людность населенного пункта, соответствующего вершине s . В качестве d_{st} будем использовать кратчайшее расстояние по сети между вершинами s и t (т. е. длину кратчайшего пути), а функцию тяготения возьмем в виде $f(d_{st}) = d_{st}^\beta$. Также мы будем предполагать, что все пользователи сети перемещаются по кратчайшим путям. Если между двумя вершинами более одного кратчайшего пути, то транспортные средства распределяются между всеми кратчайшими путями поровну. Тем самым мы полностью исключаем возможность снижения кор-

реляции между загруженностью и $BCW(a)$ за счет использования не кратчайших путей. С учетом всех этих допущений загруженность дуги a будет вычисляться по формуле

$$l(a) = \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(a)}{\mu_{st}} Q_{st}. \quad (7)$$

Здесь, как и выше, μ_{st} – количество кратчайших путей из вершины s в вершину t с учетом длины дуг, а $\mu_{st}(a)$ – количество тех из них, которые содержат дугу a .

В определении $BCW(a)$ присутствует нормирующий множитель $1/(n^2 - n)$. Поскольку $(n^2 - n)$ – количество кратчайших путей между всеми возможными парами несовпадающих вершин, то нормирующий множитель придает показателю центральности следующий смысл: значение $BCW(a)$ показывает, какую долю от всех этих путей составляют пути, содержащие дугу a . Нормируя аналогичным образом величину (7), получим

$$L(a) = \frac{l(a)}{\sum_{s \neq t} Q_{st}} = \frac{1}{\sum_{s \neq t} Q_{st}} \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(a)}{\mu_{st}} Q_{st}, \quad (8)$$

а с учетом (5) и сделанного выбора функции тяготения

$$\begin{aligned} L(a) = L_\beta(a) &= \frac{1}{\sum_{s \neq t} P_s P_t d_{st}^{-\beta}} \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(a)}{\mu_{st}} \gamma \frac{P_s P_t}{d_{st}^\beta} = \\ &= \frac{1}{\sum_{s \neq t} P_s P_t d_{st}^{-\beta}} \sum_{s \neq t} \frac{\mu_{st}(a)}{\mu_{st}} \frac{P_s P_t}{d_{st}^\beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Нормированную величину $L_\beta(a)$ можно интерпретировать следующим образом: значение $L_\beta(a)$ показывает, какую долю от суммарного объема всех транспортных корреспонденций составляют корреспонденции, осуществляющиеся по кратчайшим путям, содержащим дугу a .

Далее мы будем применять формулу (9) для расчета нормированной загруженности всех дуг сети при различных значениях параметра β и затем сравнивать получающиеся значения с показателем $BCW(a)$. В частности, нас будет интересовать коэффициент корреляции Пирсона между $L_\beta(a)$ и $BCW(a)$, который мы будем обозначать как

$$\rho(\beta) = \rho(BCW(a), L_\beta(a)). \quad (10)$$

Показатели $L_\beta(a)$ и $BCW(a)$ будут рассчитаны для сети автомобильных дорог Свердловской области. В качестве источника геоданных будем использовать проект OpenStreetMap³. Первичная обработка геоданных, необходимая для целей настоящей работы, подробно описана в статье [Мартыненко, Петров, 2016]. Моделирование и все дальнейшие расчеты будем осуществлять в программе Wolfram Mathematica [Мартыненко, 2016]. Попутно отметим, что пространственная структура сети автомобильных дорог Свердловской области и ее влияние на

³ В формате shape-файлов такие данные доступны на <https://gis-lab.info/qa/data.html>.

показатели транспортной доступности и функциональные классы дорог были исследованы в работах [Мартыненко, 2015; Мартыненко, Петров, 2016].

Сеть автомобильных дорог Свердловской области содержит около 1600 вершин, более 1050 из которых являются населенными пунктами, причем большую часть из них составляют средние и малые сельские поселения. Далее мы будем рассматривать только те населенные пункты, людность которых больше 1000 человек (таких в Свердловской области насчитывается 110), и сеть автомобильных дорог, связывающую только эти пункты. Такую сеть можно выделить из исходной сети, поскольку мы предполагаем, что корреспонденции осуществляются по кратчайшим путям. Следовательно, в выделенную сеть будут включаться только те дуги, из которых состоят кратчайшие пути между всеми возможными парами населенных пунктов, людность которых больше 1000 человек. Исходная и выделенная сети представлены на рис. 1.

Далее мы будем использовать только выделенную указанным образом сеть, называя ее для краткости просто «сеть». В частности, для дуг именно этой сети мы будем вычислять и анализировать показатели $L_p(a)$ и $BCW(a)$. Причина, по которой мы не используем для этого исходную сеть, носит технический характер, связанный с тем, что проводимые расчеты требуют значительных вычислительных ресурсов. Для выделенной сети все расчеты требуют более 4 часов машинного времени (на персональном компьютере с процессором Intel Pentium 1,6 ГГц и объемом оперативной памяти 4 Гб), а для исходной сети это время увеличивается почти в 100 раз. Это связано с тем, что время, затрачиваемое на расчеты, пропорционально квадрату количества вершин, а исходная сеть имеет их примерно в 10 раз больше, чем выделенная ($1050/110 \approx 10$).

Результаты исследования и их обсуждение. Промежуточная центральность $BCW(a)$ была рас-

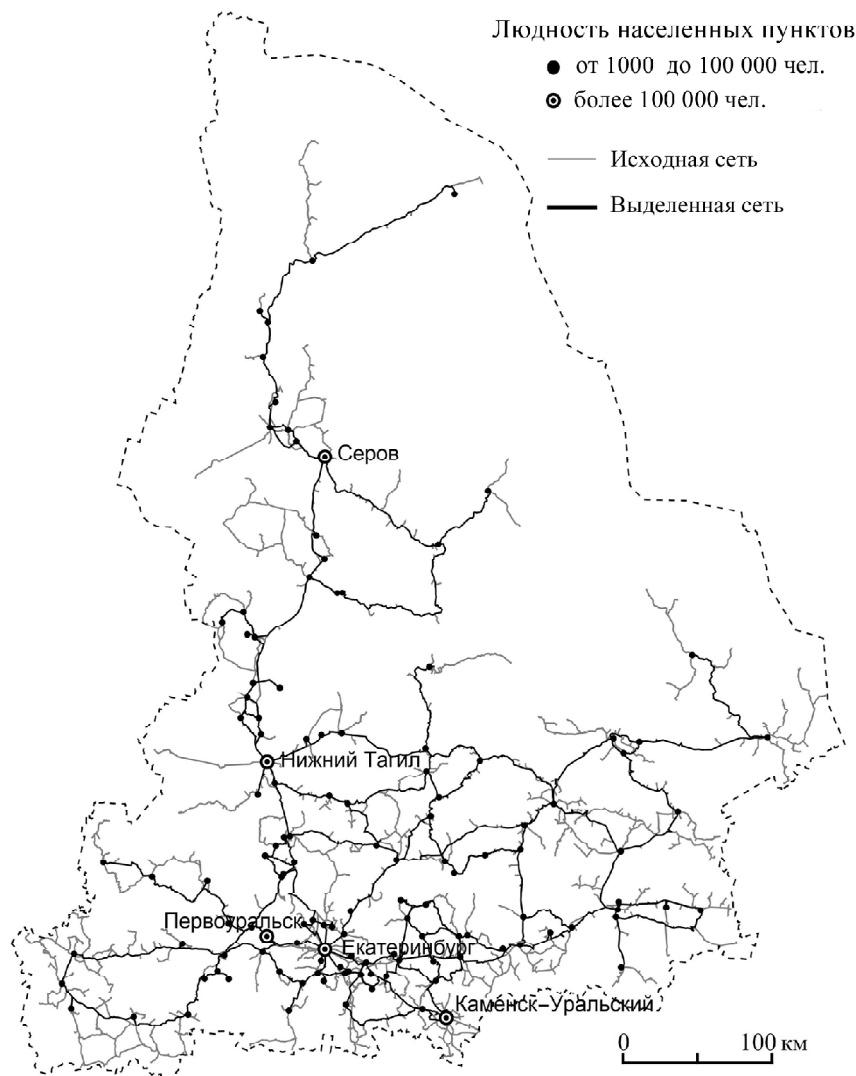


Рис. 1. Сеть автомобильных дорог Свердловской области

Fig. 1. The motorway network of the Sverdlovsk Oblast

считана для всех дуг сети по формуле (4). Полученный результат представлен на рис. 2. Загруженность $L_\beta(a)$ для всех дуг сети была рассчитана по формуле (9) при изменении β от 0 до 8 с шагом 0,01. Некоторое представление о полученных результатах дают картограммы на рис. 3, содержащие визуализацию загруженности дуг для $\beta = 0$, $\beta = 1$ и $\beta = 2$. Более полную картину поведения величин СДП, $BCW(a)$ и $L_\beta(a)$ при всех рассматриваемых значениях β можно увидеть на рис. 4. В частности, на рис. 4А изображен график зависимости СДП(β), заданной формулой (6). Также на нем для сравнения приведено значение средней длины дуги, которая для рассматриваемой сети равна 23,8 км. На рис. 4Б представлена зависимость $\rho(\beta)$, т. е. заданная формулой (10) зависимость коэффициента корреляции между $BCW(a)$ и $L_\beta(a)$ от параметра β . Наконец, на рис. 4В изображена зависимость коэффициента корреляции между $BCW(a)$ и $L_\beta(a)$ от СДП. Ее мы по-

лучили из $\rho(\beta)$ и зависимости, обратной к СДП(β). Полученная таким образом $\rho(\text{СДП})$ дает такую же информацию, что и $\rho(\beta)$, но при этом $\rho(\text{СДП})$ удобнее интерпретировать. Также в таблице приведены значения СДП(β) и $\rho(\beta)$ для некоторых значений β .

Для правильного понимания количественных значений, фигурирующих на рис. 2 и 3, обратим внимание, что в формулах (4) и (8) нормировка выполнена так, что если $BCW(a) = 0,2$ для некоторой дуги a , то это означает, что 20% от общего количества кратчайших путей между всеми парами вершин сети проходит через дугу a . Аналогично, если $L_\beta(a) = 0,2$, то это означает, что 20% от общего количества всех поездок, совершаемых в сети, проходит через дугу a .

Переходя к обсуждению полученных результатов прежде всего отметим, что значения величины $L_0(a)$ (см. рис. 3А) хорошо соответствуют пространственной структуре расселения населения Свердловской области. Наиболее загруженными являют-

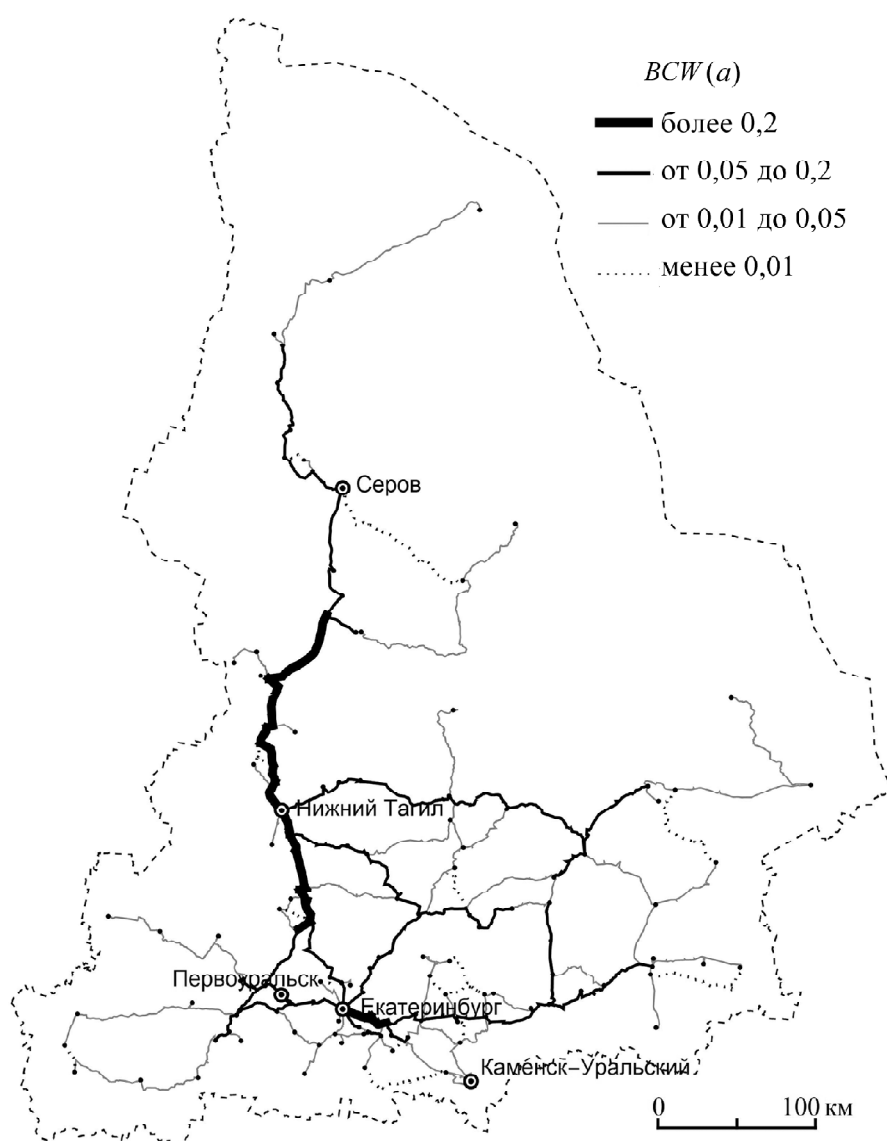
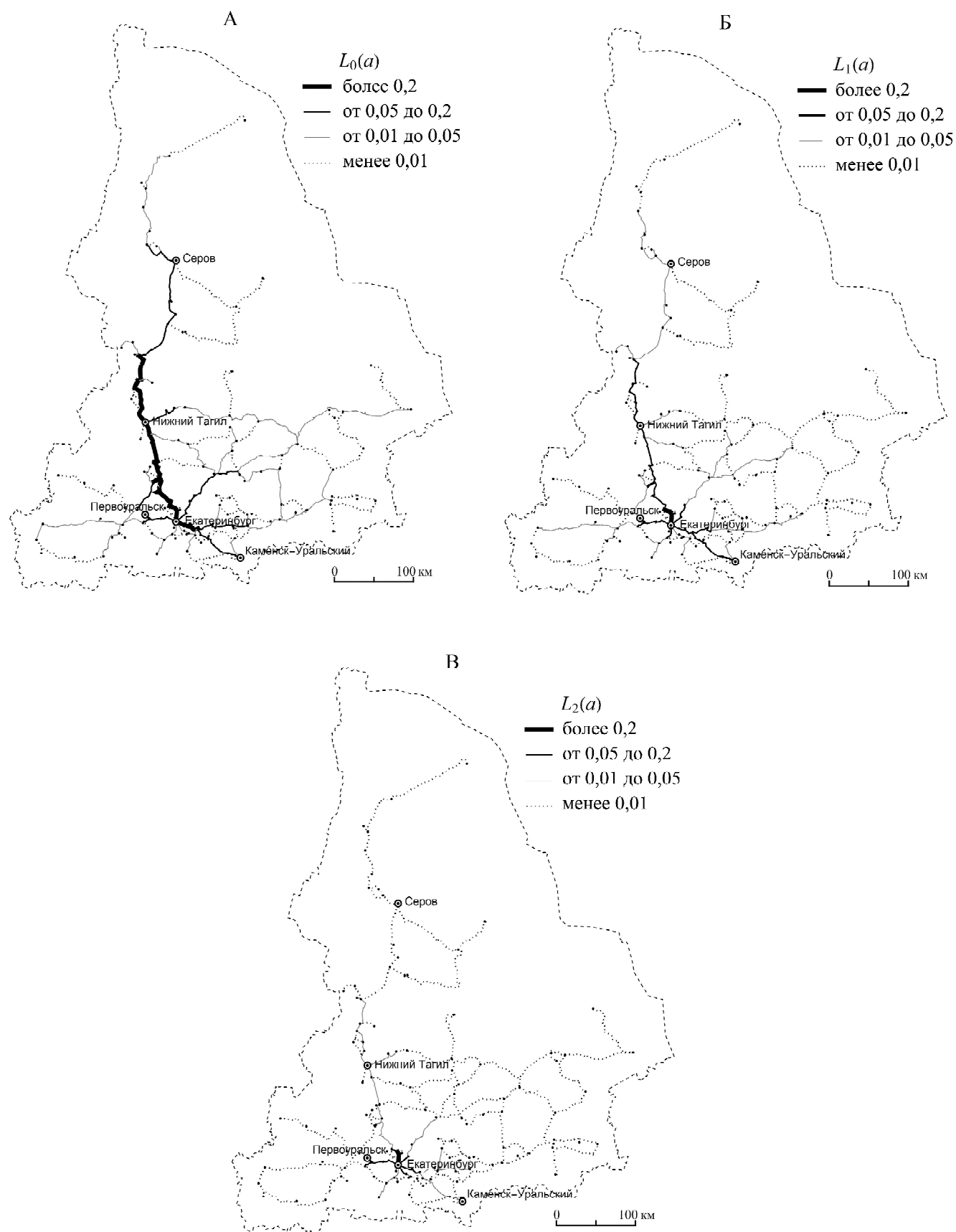


Рис. 2. Значения показателя центральности $BCW(a)$ для дуг сети

Fig. 2. The betweenness centrality $BCW(a)$ for the arcs of the network

Рис. 3. Загруженность $L_\beta(a)$ при $\beta = 0$ (А), $\beta = 1$ (Б) и $\beta = 2$ (В)Fig. 3. The load $L_\beta(a)$ for $\beta = 0$ (A), $\beta = 1$ (B) and $\beta = 2$ (B)

ся дуги, образующие меридиональную транспортную ось Каменск-Уральский–Екатеринбург–Нижний Тагил–Серов, вдоль которой проживает более 70% населения области и расположены все города с населением более 100 тыс. чел. Показатель $BCW(a)$ (см. рис. 2) также выделяет указанную ось: ее дуги имеют наибольшие значения промежуточной центральности. Кроме того, большинство периферийных дуг характеризуются как малыми значениями показателя $BCW(a)$, так и малыми значениями загруженности $L_0(a)$. Таким образом, можно заключить, что самые высокие и самые низкие значения промежуточной центральности $BCW(a)$ имеют дуги с самой высокой и самой низкой загруженностью $L_0(a)$, соответственно. Для дуг со средними значениями показателей $BCW(a)$ и $L_0(a)$ такое сходство визуально заметно гораздо меньше, однако высокое значение коэффициента корреляции $\rho(0) = 0,90$ говорит о том, что оно есть.

Все сказанное относительно качественного сходства $BCW(a)$ с $L_0(a)$ можно перенести на $L_1(a)$. Здесь тоже наиболее и наименее загруженные дуги имеют наибольшие и наименьшие значения промежуточной центральности. Однако с количественной точки зрения сходство между $BCW(a)$ и $L_1(a)$ несколько слабее. Коэффициент корреляции между ними $\rho(1) = 0,78$. Наконец для $L_2(a)$ сходство с $BCW(a)$ уже практически отсутствует. Это следует как из сравнения (см. рис. 2 и 3В), так и из значения коэффициента корреляции $\rho(2) = 0,41$.

Необходимо отметить, что рассматриваемые здесь загруженности дуг сети $L_\beta(a)$ учитывают только лишь объемы транспортных корреспонденций между населенными пунктами Свердловской области и не принимают во внимание их корреспонденции с населенными пунктами соседних регионов, а также между пунктами различных соседних регионов, которые обеспечивают транзитный поток транспортных средств. Учет такого дополнительного трафика естественно вызовет изменение количественных значений $L_\beta(a)$. Однако такое изменение приведет только лишь к уменьшению $\rho(\beta)$ и усилению полученных выше качественных выводов о том, что с ростом β снижается корреляция между $BCW(a)$ и $L_\beta(a)$. Учет дополнительного трафика обеспечит, прежде всего, значительное усиление загруженности периферийных (для сети Свердловской области) дуг и нарушит отмеченное выше соответствие между загруженностью и промежуточной центральностью для дуг с наименьшими значениями промежуточной центральности.

Сравнивая между собой рис. 3А, 3Б и 3В, мы видим, что с ростом β уменьшается количество дуг с высоким уровнем загруженности. Их четкая иерархическая структура (см. рис. 3А) постепенно «размывается» с увеличением β , и мы видим достаточно равномерное распределение загруженности по дугам сети (см. рис. 3В). Чтобы понять, почему так происходит, достаточно сравнить СДП, соответствующие различным значениям β , со средней длиной дуги. Так, для $\beta = 0$ имеем $СДП(0)/23,8 \approx 7$, т. е. в среднем

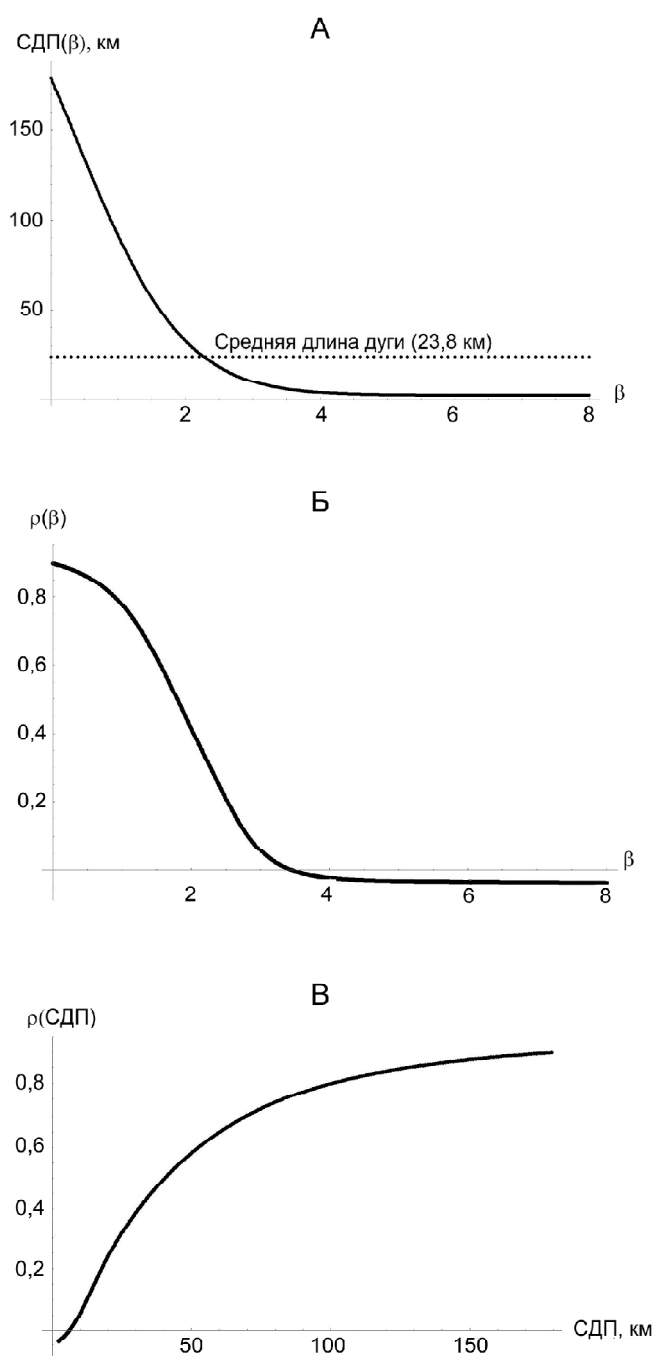


Рис. 4. Зависимости между различными характеристиками сети: А – СДП от β ; Б – коэффициента корреляции ρ от β ; В – коэффициента корреляции ρ от СДП

Fig. 4. Dependences between different characteristics of the network: А – the correlation coefficient ρ from β ; Б – the correlation coefficient ρ from ATL

одна поездка проходит через семь дуг, значит есть большое количество дуг, через которые проходит много поездок и, следовательно, они будут иметь высокие загруженности. Для $\beta = 2$ получаем $СДП(2)/23,8 \approx 1,4$. Это означает, что большинство поездок проходят через одну или две дуги, т. е. фак-

тически основное движение происходит между соседними вершинами. Следовательно, для появления дуг с высоким уровнем загруженности просто нет никаких оснований.

На графиках (см. рис. 4) видно, что с дальнейшим ростом β значения СДП(β) и $\rho(\beta)$ уменьшаются, т. е. отмеченные выше тенденции по равномерной локализации поездов между соседними вершинами сети будут только усиливаться. При этом на графиках хорошо видно, что уже начиная с $\beta = 6$ величины СДП(β) и $\rho(\beta)$ практически выходят на свои асимптотические значения, которые могут быть найдены аналитически – переходом к пределу при $\beta \rightarrow \infty$. Обозначим наименьшую из дуг сети через $a_{\min}$, а ее длину через $d(a_{\min})$, тогда, используя стандартные приемы вычисления пределов (например, [Матейко, Таныгина, 2011]), из формул (6), (8) и (9) получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{СДП}(\beta) = d(a_{\min}), \quad (11)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} L_{\beta}(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a = a_{\min}, \\ 0 & \text{при } a \neq a_{\min}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho(\beta) = \frac{BCW(a_{\min}) - \overline{BCW(a)}}{\sqrt{k-1} \cdot S(BCW(a))}, \quad (13)$$

где k – количество дуг в сети; $\overline{BCW(a)}$ и $S(BCW(a))$ – среднее значение и среднеквадратическое отклонение величины $BCW(a)$ соответственно. Подчеркнем, что формулы (11)–(13) справедливы для любой сети (а не только для автодорог Свердловской области).

При анализе зависимости $\rho(\beta)$ для рассматриваемой сети достаточно интересным оказывается тот факт, что, начиная с некоторого значения β , коэффициент корреляции между $BCW(a)$ и $L_{\beta}(a)$ становится отрицательным, т. е. имеет место обратная корреляция между показателем центральности и загруженностью дуг. Из формулы (13) легко получить условие такого поведения для любой сети: *коэффициент корреляции $\rho(\beta)$ становится отрицательным, начиная с некоторого значения β , если для сети выполнено неравенство*

$$BCW(a_{\min}) < \overline{BCW(a)}. \quad (14)$$

Таким образом, из формул (11) и (12) следует, что значительное уменьшение СДП приводит к тому, что почти все поездки в сети будут осуществляться между соседними вершинами, соединенными самыми короткими дугами, а по остальным дугам движения почти не будет. И в предельном случае поездки будут осуществляться только по самой короткой дуге.

Рассмотренные особенности поведения $L_{\beta}(a)$, СДП(β) и $\rho(\beta)$ при больших значениях β представляют некоторый теоретический интерес, однако с точки зрения изучения функционирования реальных транспортных сетей их ценность невелика. В реальных сетях значение СДП значительно превосходит асимптотическую величину $d(a_{\min})$ и, по всей види-

мости, не может быть ниже средней длины дуги. Для рассматриваемой сети автодорог Свердловской области СДП равно средней длине дуги при $\beta = 2,27$. Поэтому, при анализе влияния СДП на корреляцию между промежуточной центральностью и загруженностью необходимо ограничиться диапазоном изменения β от 0 до 2,27 (этому соответствует изменение СДП от 179,3 до 23,8 км). Такое ограничение хорошо согласуется с тем, что значения β , полученные в различных исследованиях на основе эмпирических данных, лежат в диапазоне от 0 до 2 [Barthelemy, 2011].

На рис. 4Б хорошо видно, что даже если рассматривать зависимость $\rho(\beta)$ только при β из промежутка $[0; 2,27]$, то мы будем иметь существенное изменение ее значений от 0,9 до 0,3. Более того, $\rho(\beta)$ начинает принимать небольшие значения при β существенно меньших, чем 2,27. Так $\rho(\beta) = 0,5$ при $\beta = 1,7$, что соответствует значению СДП = 45,7 км. Таким образом, мы видим, что изменение СДП приводит к существенному изменению коэффициента корреляции между промежуточной центральностью и загруженностью. Мы здесь не будем подробно обсуждать причины, которые могут приводить к изменению СДП, но очевидно, что они носят в основном экономический и технический характер. Морфология сети если и оказывает влияние на СДП, то косвенное и крайне незначительное в количественном выражении (СДП существенно зависит от размера сети, но не от ее структуры).

Еще один аспект полученных результатов, который мы хотим здесь обсудить, заключается в монотонном характере зависимости $\rho(\beta)$. Дело в том, что большие (т. е. близкие к единице) значения $\rho(\beta)$ свидетельствуют о высокой эффективности морфологической структуры сети. Тесная корреляция между загруженностью и промежуточной центральностью говорит о том, что морфология сети хорошо соответствует ее использованию. С учетом этого весьма неожиданным является тот факт, что $\rho(\beta)$ убывает при всех β и наибольшее значение принимает при $\beta = 0$. На наш взгляд, гораздо более естественным было бы, если бы $\rho(\beta)$ имел один или несколько локальных максимумов и в одном из них достигал своего наибольшего значения. Тогда это бы означало, что есть некое значение СДП (соответствующее β , при котором достигается наибольшее значение $\rho(\beta)$), наилучшим образом соответствующее морфологии сети. Оно было бы результатом адаптации транспортной сети в процессе своей эволюции к перманентному изменению СДП (т. е. к изменению транспортного поведения пользователей сети) с наиболее оптимальным для себя значением. Полученный выше результат говорит о том, что для транспортной сети наиболее оптимальным оказалось $\beta = 0$, т. е. значение, при котором расстояние не влияет на поездки. В этом случае объем транспортной корреспонденции между двумя населенными пунктами зависит только от их людности и не зависит от расстояния между ними ($Q_{st} = \gamma P_s P_t$ при $\beta = 0$). Другими словами, мы получили, что ис-

пользование сети будет наилучшим образом соответствовать ее морфологии, если расстояния не влияют на поведение пользователей сети. На наш взгляд, этот факт нуждается в отдельном глубоком исследовании, выходящем за рамки данной статьи. Мы планируем посвятить этому отдельную работу, в которой прежде всего необходимо будет проверить, насколько такой результат справедлив для других сетей.

Выводы:

– предложенный в работе метод использования гравитационной модели для расчета загруженности элементов транспортной сети позволяет исследовать функциональные свойства сети и их взаимосвязь с ее морфологией. В частности, этот метод позволяет объяснить и количественно описать отсутствие значительной корреляции между загруженностями дуг и показателями их промежуточной центральности, которое имеет место для многих конкретных транспортных сетей;

– применение указанного метода к сети автомобильных дорог Свердловской области показывает, что функциональные свойства транспортной сети соответствуют ее морфологическим свойствам только при определенном транспортном поведении пользователей сети. А именно, если сеть в основном используется для поездок на дальние расстоя-

ния, значительно превышающие среднюю длину дуги сети, то загруженность ее дуг (функциональное свойство) в значительной мере определяется их морфологической иерархией, установленной на основе показателя промежуточной центральности. Если же пользователи используют сеть преимущественно для поездок на небольшие расстояния, сравнимые со средней длиной ее дуги, то загруженности дуг не зависят от значений показателя промежуточной центральности. Таким образом, чем больше «длинных» и меньше «коротких» поездок, т. е. чем больше средняя длина поездки в сети, тем сильнее будет влияние морфологии сети на ее функционирование;

– полученный результат представляет значительный интерес с практической точки зрения, поскольку он позволяет оценить, насколько морфология любой сети соответствует (способствует) ее функционированию. Для такой оценки достаточно установить среднюю длину поездки в данной сети (например, на основе выборочного опроса ее пользователей) и зависимость коэффициента корреляции между загруженностью и центральностью от средней длины поездки (с помощью описанной выше методики). Значение коэффициента корреляции для наблюдаемой средней длины поездки представляет собой меру соответствия морфологии сети ее функционированию.

Благодарности. Статья подготовлена в соответствии с Планом НИР УрГУПС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бабуринов В.Л., Земцов С.П., Кидяева В.М. Методика оценки потенциала экономико-географического положения городов России // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5. Геогр. 2016. № 1. С. 39–45.
- Бакланов П.Я., Мошков А.В., Романов М.Т. Базисные структурные звенья в долгосрочном развитии транспортных систем Дальневосточного региона России // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5. Геогр. 2018. № 4. С. 83–92.
- Бугроменко В.Н. Транспорт в территориальных системах. М.: Наука, 1987. 112 с.
- Зинькина Ю.В., Коротаев А.В., Андреев А.И. Структура глобальной миграционной сети и динамика изменения мир-системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 27. Глобалистика и геополитика. 2014. № 1–2. С. 18–32.
- Карпачевский А.М., Шилякина М.Н. Изучение динамики структуры калининградской энергосистемы на основе сетевого анализа // Окружающая среда и энергосистемы. 2019. № 2. С. 14–24.
- Мартыненко А.В. Взаимосвязь функциональных классов автомобильных дорог с показателем центральности (на примере автодорожной сети Свердловской области) // Вестник УрГУПС. 2015. № 4. С. 9–16.
- Мартыненко А.В. Программа Wolfram Mathematica как универсальная среда для обработки и анализа географической информации // Географический вестник. 2016. № 4. С. 129–138.
- Мартыненко А.В., Петров М.Б. Влияние начертания транспортной сети на показатели доступности (на примере Свердловской области) // Региональные исследования. 2016. № 2. С. 21–30.
- Матейко О.М., Таныгина А.Н. Высшая математика для географов: учебное пособие для студентов географических и геоэкологических специальностей вузов. Минск: БГУ, 2011. 267 с.
- Носырева Е.В. Сравнительный анализ топологических свойств сетей электроснабжения Италии и Восточной Сибири // Вестник ИРГТУ. 2018. № 11. С. 170–181.
- Панов Р.Д. Эволюция пространственной структуры сетей крупнейших метрополитенов мира // Известия РАН. Серия географическая. 2020. № 1. С. 20–26. DOI: 10.31857/S2587556620010161.
- Сяолин Л., Анохин А.А., Шендрик А.В., Чунлян С. Изменения в пространственном распределении населения и дорожной сети Санкт-Петербурга // Балтийский регион. 2016. № 4. С. 53–77.
- Тархов С.А. Эволюционная морфология транспортных сетей. Смоленск: Универсум, 2006. 386 с.
- Тархов С.А. Пространственные закономерности роста высокоскоростных железных дорог в мире // Региональные исследования. 2016. № 4. С. 90–104.
- Тархов С.А. Анализ топологических дефектов сухопутной транспортной сети регионов Сибири и Дальнего Востока // Региональные исследования. 2019. № 3. С. 53–62.
- Шумилов А.В. Оценивание гравитационных моделей международной торговли: обзор основных подходов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2017. № 2. С. 224–250.
- Щербакова Н.Г. Меры центральности в сетях // Проблемы информатики. 2015. № 2. С. 18–30.
- Barthelemy M. Spatial networks, *Physics Reports-review Section of Physics Letters*, 2011, no. 1, p. 1–101.
- Evans A.W. The calibration of trip distribution models with exponential or similar cost function, *Transportation Research*, 1971, vol. 5, p. 15–38, DOI: 10.1016/0041-1647(71)90004-9.
- Haggett P., Chorley R. *Network Analysis in Geography*, London, Edward Arnold, 1969, 348 p.

Kaluza P., Koelzsch A., Gastner M.T., Blasius B. The complex network of global cargo ship movements, *Journal of the Royal Society Interface*, 2010, no. 48, p. 1093–1103.

Kansky K. Structure of transportation networks: relationships between network geometry and regional characteristics, Chicago, University of Chicago Press, 1969, 155 p.

Kazerani A., Winter S. Can betweenness centrality explain traffic flow? *Proceedings of the 12th AGILE International Conference on Geographic Information Science*, Hannover, Leibniz Universität Hannover, 2009a, 9 p.

Kazerani A., Winter S. Modified betweenness centrality for predicting traffic flow, *Proceedings of the 10th International Conference on GeoComputation*, Sydney, University of New South Wales, 2009b, 5 p.

Krings G., Calabrese F., Ratti C., Blondel V.D. A gravity model for inter-city telephone communication networks, *Journal of*

Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2009, vol. 2009, p. L07003, DOI: 10.1088/1742-5468/2009/07/L07003.

Kurant M., Thiran P. Layered complex networks. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96(13), p. 138701, DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.138701.

Ortuzar J.D., Willumsen L.G. *Modelling Transport*, Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2011, 606 p.

Puzis R., Altshuler Y., Elovici Y., Bekhor S., Shifan Y., Pentland A. Augmented Betweenness Centrality for Environmentally Aware Traffic Monitoring in Transportation Networks, *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2013, vol. 17, p. 91–105, DOI: 10.1080/15472450.2012.716663.

Weiyang L., Xin L., Tao L., Bin L. Approximating betweenness centrality to identify key nodes in a weighted urban complex transportation network, *Journal of Advanced Transportation*, 2019, Article ID 9024745, 8 p., DOI: 10.1155/2019/9024745.

Поступила в редакцию 06.08.2020

После доработки 05.11.2020

Принята к публикации 21.01.2021

A.V. Martynenko^{1,2}

CORRELATION BETWEEN FUNCTIONAL PROPERTIES OF THE TRANSPORTATION NETWORK AND THE MORPHOLOGICAL HIERARCHY OF ITS ELEMENTS (CASE STUDY OF MOTORWAYS OF THE SVERDLOVSK OBLAST)

Various numerical characteristics of topological and metric properties are often used to study the transport networks. The most popular of them is the betweenness centrality. It is used to describe the hierarchical structure of network elements (arcs and vertices). It equals the number of shortest paths that pass through particular element of the network. Thus, it shows the importance of the element for the whole network.

The betweenness centrality parameter was used by various authors as both an analysis tool and an independent object of study. In particular, many experts were interested in how this indicator reflects the real functioning of a transport network, for example, the utilized capacity of its elements. Correlation and regression analysis of the utilized capacity and betweenness centrality for a number of real networks has shown that there is a direct correlation between these values. However, it is not strong enough to be used to predict the utilized capacity of network elements on the basis of their betweenness centrality.

The paper presents the in-depth study of the relationship between the betweenness centrality and the utilized capacity as a part of more general relationship between the morphological and functional properties of transport network. The utilized capacity of network arcs was modeled for the motorway network of the Sverdlovsk Oblast using the gravity model of origin-destination matrix. Different parameters of the gravity model resulted in different loading modes; each of them was analyzed in terms of their relationship with the betweenness centrality.

As a result of modeling and analysis, it was found that the correlation ratio between the betweenness centrality and the utilized capacity depends much on the transport behavior of network users, namely the distance of their trips. If the average trips length is significantly longer than the average arc length, there is a strong correlation between the betweenness centrality and congestion. Otherwise, there is no significant relationship between the betweenness centrality and the utilized capacity of the network.

Key words: betweenness centrality; gravity model; origin-destination matrix; network morphology; load of network elements

Acknowledgements. The article was prepared under the Plan of research work of the Ural State University of Railway Transport.

¹ Ural State University of Railway Transport, Department of Natural Sciences, Associate Professor.

² Institute of Economics, Russian Academy of Science (the Ural Branch), Center of production forces development and placement, Senior Scientific Researcher, PhD in Physics and Mathematics; e-mail: amartynenko@rambler.ru

REFERENCES

- Baburin V.L., Zemtsov S.P., Kidyayeva V.M. Metodika otsenki potentsiala ekonomiko-geograficheskogo polozheniya gorodov Rossii [Methodology of evaluating the potential of the economic-geographical position of Russia's towns], *Vestn. Mosk. un-ta, Ser. 5, Geogr.*, 2016, no. 1, p. 39–45. (In Russian)
- Baklanov P.Ya., Moshkov A.V., Romanov M.T. Bazyisnye strukturnye zven'ya v dolgosrochnom razvitiitransportnykh sistem Dal'nevostochnogo regiona Rossii [Basic structural links in the long-term development of transport systems of the Far Eastern region of Russia], *Vestn. Mosk. un-ta, Ser. 5, Geogr.*, 2018, no. 4, p. 83–92. (In Russian)
- Barthelemy M. Spatial networks, *Physics Reports-review Section of Physics Letters*, 2011, no. 1, p. 1–101.
- Bugromenko V.N. *Transport v territorial'nykh sistemakh* [Transport in territorial systems], Moscow, Nauka Publ., 1987, 112 p. (In Russian)
- Evans A.W. The calibration of trip distribution models with exponential or similar cost function, *Transportation Research*, 1971, vol. 5, p. 15–38, DOI: 10.1016/0041-1647(71)90004-9.
- Haggett P., Chorley R. *Network Analysis in Geography*, London, Edward Arnold, 1969, 348 p.
- Kaluza P., Koelzsch A., Gastner M.T., Blasius B. The complex network of global cargo ship movements, *Journal of the Royal Society Interface*, 2010, no. 48, p. 1093–1103.
- Kansky K. *Structure of transportation networks: relationships between network geometry and regional characteristics*, Chicago, University of Chicago Press, 1969, 155 p.
- Karpachevskii A.M., Shilyakina M.N. Izuchenie dinamiki struktury kaliningradskoi energosistemy na osnove setevogo analiza [The study of the structure dynamics of the Kaliningrad power system based on the network analysis], *Okruzhayushchaya sreda i energovedenie*, 2019, no. 2, p. 14–24. (In Russian)
- Kazerani A., Winter S. Can betweenness centrality explain traffic flow, *Proceedings of the 12th AGILE International Conference on Geographic Information Science*, Hannover, Leibniz Universität Hannover, 2009, 9 p.
- Kazerani A., Winter S. Modified betweenness centrality for predicting traffic flow. *Proceedings of the 10th International Conference on GeoComputation*, Sydney, University of New South Wales, 2009, 5 p.
- Krings G., Calabrese F., Ratti C., Blondel V.D. A gravity model for inter-city telephone communication networks, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009, vol. 2009, p. L07003, DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2009/07/L07003>.
- Kurant M., Thiran P. Layered complex networks, *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96(13):138701, DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.138701.
- Martynenko A.V. Programma Wolfram Mathematica kak universal'naya sreda dlya obrabotki i analiza geograficheskoi informatsii [The Wolfram Mathematica program as a universal tool for processing and analysing geographic information], *Geograficheskii vestnik*, 2016, no. 4, p. 129–138. (In Russian)
- Martynenko A.V. Vzaimosvyaz' funktsional'nykh klassov avtomobil'nykh dorog s pokazatelem tsentral'nosti (na primere avtodorozhnoi seti Sverdlovskoi oblasti) [Relationship between functional classes of motor roads and the centrality factor (case study of motorroad network of the Sverdlovsk Oblast)], *Vestnik UrGUPS*, 2015, no. 4, p. 9–16. (In Russian)
- Martynenko A.V., Petrov M.B. Vliyaniye nachertaniya transportnoi seti na pokazateli dostupnosti (na primere Sverdlovskoi oblasti) [Influence of surface transportation network on accessibility (by the example of the Sverdlovsk Oblast)], *Regional research*, 2016, no. 2, p. 21–30. (In Russian)
- Mateiko O.M., Tanygina A.N. *Vysshaya matematika dlya geografov: uchebnoe posobie dlya studentov geograficheskikh i geokologicheskikh spetsial'nostei vuzov* [Higher mathematics for geographers: textbook for students of geographical and geoecological specialties of higher education institutions], Minsk, BGU Publ., 2011, 267 p. (In Russian)
- Nosyreva E.V. Sravnitel'nyi analiz topologicheskikh svoistv setei elektrosnabzheniya Italii i Vostochnoi Sibiri [Comparative analysis of topological properties of electrical supply networks in Italy and Eastern Siberia], *Vestnik IrGTU*, 2018, no. 11, p. 170–181. (In Russian)
- Ortuzar J.D., Willumsen L.G. *Modelling Transport*, Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2011, 606 p.
- Panov R.D. Evolyutsiya prostranstvennoi struktury setei krupneishikh metropolitenov mira [Evolution of spatial structure of the world's biggest subway networks], *Izvestiya RAN, Seriya geograficheskaya*, 2020, no. 1, p. 20–26. (In Russian)
- Puzis R., Altshuler Y., Elovici Y., Bekhor S., Shiftan Y., Pentland A. Augmented Betweenness Centrality for Environmentally Aware Traffic Monitoring in Transportation Networks, *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2013, vol. 17, p. 91–105, DOI: 10.1080/15472450.2012.716663.
- Shcherbakova N.G. Mery tsentral'nosti v setyakh [Measures of centrality in networks], *Problemy informatiki*, 2015, no. 2, p. 18–30. (In Russian)
- Shumilov A.V. Otsenivaniye gravitatsionnykh modelei mezhdunarodnoi trgovli: obzor osnovnykh podkhodov [Estimating gravity models of international trade: a survey of methods], *Ekonomicheskii zhurnal Vyshei shkoly ekonomiki*, 2017, no. 2, p. 224–250. (In Russian)
- Syaolin' L., Anokhin A.A., Shendrik A.V., Chunlyan S. Izmeneniya v prostranstvennom raspredelenii naseleniya i dorozhnoi seti Sankt-Peterburga [Changes in the spatial distribution of population and transport network of Saint Petersburg], *Baltiiskii region*, 2016, no. 4, p. 53–77. (In Russian)
- Tarkhov S.A. Analiz topologicheskikh defektov sukhoputnoi transportnoi seti regionov Sibiri i Dal'nego Vostoka [Analysis of topological defects of land transport network of Siberia and Russian Far East regions], *Regional'nye issledovaniya*, 2019, no. 3, p. 53–62. (In Russian)
- Tarkhov S.A. *Evolyutsionnaya morfologiya transportnykh setei* [Evolutional morphology of transport networks], Smolensk, Universum Publ., 2006, 386 p. (In Russian)
- Tarkhov S.A. Prostranstvennye zakonomernosti rosta vysokoskorostnykh zheleznykh dorog v mire [Spatial consistency of world widehigh-speed railways' growth], *Regional'nye issledovaniya*, 2016, no. 4, p. 90–104. (In Russian)
- Weiyan L., Xin L., Tao L., Bin L. Approximating betweenness centrality to identify key nodes in a weighted urban complex transportation network, *Journal of Advanced Transportation*, 2019, Article ID 9024745, 8 p., DOI: 10.1155/2019/9024745.
- Zin'kina Yu.V., Korotaev A.V., Andreev A.I. Struktura global'noi migratsionnoi seti i dinamika izmeneniya Mir-Sistemy [The structure of global migration network and dynamics changes in the world system], *Vestn. Mosk. un-ta, Ser. 27, Globalistika i geopolitika*, 2014, no. 1–2, p. 18–32. (In Russian)

Received 06.08.2020

Revised 05.11.2020

Accepted 21.01.2021